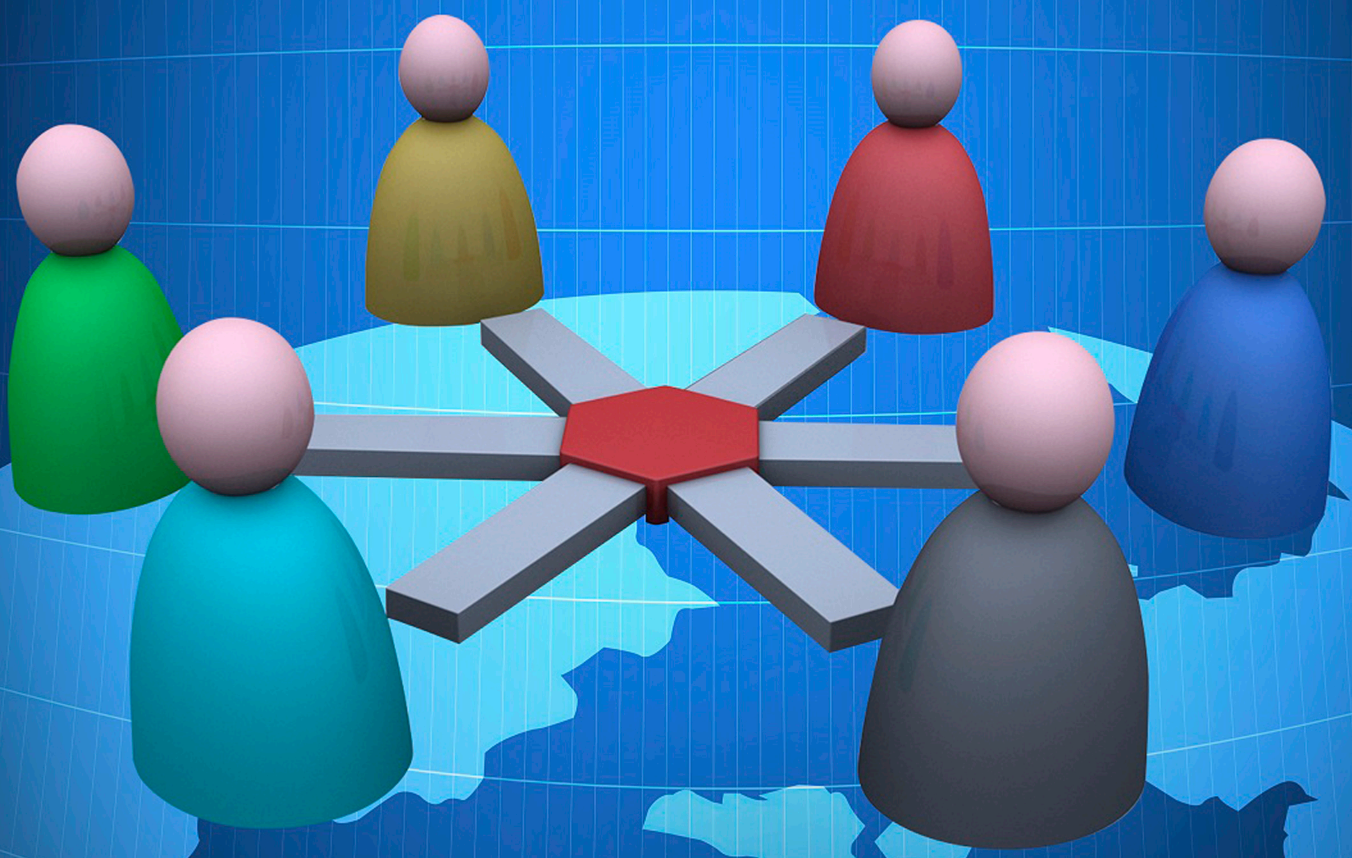
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

XIV JORNADES DE XARXES D´INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinars



JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA XIV

Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares

Coordinadores i coordinadors / *Coordinadoras y coordinadores:*

María Teresa Tortosa Ybáñez

Salvador Grau Company

José Daniel Álvarez Teruel

ISBN: 978-84-608-7976-3

Revisión y maquetación: Verónica Francés Tortosa

Publicación: Julio 2016

Desarrollo de una mirada profesional en un módulo sobre la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional

À. Buforn; C. Fernández; P. Ivars

Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante

RESUMEN

Uno de los objetivos en la formación de maestros desde el área de didáctica de las matemáticas es desarrollar la competencia una mirada profesional sobre la enseñanza y aprendizaje. Ser capaz de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica poder identificar o reconocer evidencias de la manera en que los estudiantes resuelven los problemas, interpretar dichas evidencias relacionándolas con ideas teóricas sobre cómo aprenden los estudiantes, y tener argumentos para justificar la toma de decisiones sobre qué tareas ayudan a consolidar o desarrollar la comprensión de los estudiantes. En esta comunicación se presentan los primeros resultados obtenidos tras la implementación de un módulo de enseñanza en el Grado en Maestro en Educación Primaria, centrado en desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de educación primaria en el dominio matemático específico del razonamiento proporcional.

Palabras clave: mirada profesional, conocimiento del profesor, módulo de enseñanza, aprendizaje de los estudiantes para maestro, razonamiento proporcional.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente mirar profesionalmente (*professional noticing*) la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010; van Es y Sherin, 2002). Esta competencia se apoya en que los profesores sean capaces de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas, por lo que permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas.

Además, estos estudios previos muestran que esta competencia puede comenzar a desarrollarse en los programas de formación. Desde esta perspectiva, y teniendo en cuenta la metodología seguida en nuestro grupo de investigación que se centra en ciclos de diseño-experimentación-análisis donde se relaciona la práctica de formar maestros, el diseño de materiales docentes y la investigación sobre el aprendizaje del maestro (Llinares, 2014), se presentan los resultados obtenidos tras la implementación de un módulo de enseñanza centrado en que los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria desarrollen la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio matemático del razonamiento proporcional. El diseño de este módulo de enseñanza se presentó en la jornada de Redes de 2015 (Fernández y Buforn, 2015).

1.1 La competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizan esta competencia como un conjunto de tres destrezas que están interrelacionadas:

- *identificar* las estrategias usadas por los estudiantes
- *interpretar* la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes
- *decidir* cómo responder teniendo en cuenta la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes.

Por tanto es necesario que los estudiantes para maestro reconozcan evidencias de la manera en la que los estudiantes de educación primaria resuelven los problemas que puedan aportar información sobre cómo están comprendiendo, interpreten dichas evidencias relacionándolas con ideas teóricas sobre cómo aprenden los alumnos y justifiquen la toma de decisiones sobre qué tareas es posible proporcionar para consolidar o desarrollar la comprensión de los estudiantes a través de sus interpretaciones.

Trabajos previos han mostrado que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema (conocimiento matemático) le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de un contenido matemático. Fernández, Llinares y Valls (2012) indicaron que, en el dominio de la proporcionalidad, discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales es un elemento clave en el desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes para maestro para identificar evidencias de diferentes niveles del razonamiento proporcional de los estudiantes. Magiera, van den Kieboom y Moyer (2013) mostraron que los estudiantes para maestro demostraban una habilidad limitada para reconocer e interpretar el pensamiento algebraico, en general, mostrada por los estudiantes en entrevistas uno a uno. Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) indicaron que un elemento clave en el desarrollo de una mirada profesional de futuros profesores en relación al pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las derivadas fue la comprensión por parte de los futuros profesores de los elementos matemáticos que los estudiantes usaban al resolver los problemas de derivada.

En nuestro caso nos centraremos en el dominio del desarrollo del razonamiento proporcional dado que investigaciones recientes indican que los estudiantes para maestro tienen dificultades tanto en comprender algunas de las componentes que constituyen el razonamiento proporcional (Buforn y Fernández, 2014; Livy y Vale, 2011; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) como en interpretar respuestas de estudiantes de Primaria cuando resuelven tareas relacionadas con el razonamiento proporcional (Balderas, Block y Guerra, 2014; Rivas, Godino y Castro, 2012).

1.2 La competencia mirar profesionalmente el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación primaria

El razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente), las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down* y proceso *unitizing*) y la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales (Lamon, 2005, 2007; Pitta-Pantazi y Christou 2011).

Un conocimiento limitado de estas componentes que constituyen el razonamiento proporcional puede llevar a los estudiantes para maestro a tener dificultades en interpretar las respuestas de alumnos de Educación Primaria, y a tener una visión limitada en relación a las características de las tareas que ellos podrían proponer como maestros para apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes de educación primaria.

Desde esta perspectiva, el objetivo del módulo de enseñanza diseñado es ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en relación al razonamiento proporcional. De esta manera, el módulo se centra en desarrollar las destrezas de identificar, interpretar y decidir. En particular, identificar los conceptos matemáticos implicados en las tareas (componentes que integran el razonamiento proporcional), identificar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes de educación primaria en relación a los conceptos matemáticos implicados y decidir qué tareas proponer como maestros para ayudar a los estudiantes de educación primaria a progresar en el desarrollo del razonamiento proporcional.

2. MÓDULO DE ENSEÑANZA: RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

El módulo de enseñanza consta de 4 sesiones de 2 horas cada una y se implementó durante el curso académico 2014-2015 en 8 grupos, con un total de 475 estudiantes. La asignatura en la que ha sido implementado el módulo de enseñanza es *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* del Grado en Maestro en Educación Primaria.

En las dos primeras sesiones, los estudiantes para maestro tenían que resolver actividades relacionadas con las distintas componentes del razonamiento proporcional, discutiendo diferentes estrategias de resolución. Estas actividades tenían como objetivo que los estudiantes para maestro identificaran los significados de los objetos matemáticos y las formas de razonar con estos significados implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional. Por ejemplo en el siguiente problema:

1. *En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:*
    a. *7.5 metros por 11.4 metros*
    b. *4.55 metros por 5.08 metros*
    c. *18.5 metros por 24.5 metros*

    ¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado? Justifica tu respuesta

El objetivo de la resolución de esta tarea es que el estudiante para maestro llegue a reconocer el concepto de la razón como medida, es decir, para poder resolver el problema se debe cuantificar la razón en el sentido que el loft será más cuadrado cuando la razón sea más próxima a 1. En este caso, las razones de los tres lofts son 7,5/11,4, 4,55/5,08 y 18,5/24,5, por lo que el loft más cuadrado es el segundo ya que se aproxima más a 1.

La resolución de este tipo de actividades por parte de los estudiantes para maestro vinculadas a los significados de los objetos matemáticos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional y las formas de razonar con estos significados, se considera una actividad necesaria para que los estudiantes para maestro re-aprendan el conocimiento de matemáticas que se considera necesario para interpretar la comprensión manifestada por los estudiantes de primaria y adoptar decisiones adecuadas durante la enseñanza que ayude a los estudiantes a progresar en su comprensión.

En la tercera y cuarta sesión, los estudiantes para maestro resolvieron tareas centradas en interpretar respuestas de estudiantes de primaria a los problemas resueltos previamente. Las tareas estaban formadas por un problema relacionado con una componente del razonamiento proporcional, tres respuestas de estudiantes de primaria con diferentes características en cuanto a la comprensión de la componente, y cuatro cuestiones centradas en la enseñanza y aprendizaje. La Figura 1 muestra el problema y las respuestas de estudiantes de primaria al problema para la componente razón. Los resultados presentados en esta comunicación corresponden al análisis de las respuestas de los estudiantes para maestro a esta tarea.

- *¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta tarea? Justifica tu respuesta.*
- *¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas?*

- *Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para ayudarle a que comprendiese estos conceptos?*
- *Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para que aumente su comprensión de los conceptos implicados?*

Figura 1. Problema y respuestas de estudiantes de primaria para la componente razón

1. En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:
    a. 7.5 metros por 11.4 metros
    b. 4.55 metros por 5.08 metros
    c. 18.5 metros por 24.5 metros

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta 1

$\frac{7'5}{11'4} = 0'65$

$\frac{4'55}{5'08} = 0'89$ → Es el más cuadrado ya que es el número más cercano a 1.

$\frac{18'5}{24'5} = 0'75$

Respuesta 2

$\frac{7'5}{11'4} = 0'658$ $\frac{18'5}{24'5} = 0'755$

$\frac{4'55}{508} = 0'896$ En proporción 4'55 por 508 existe menor diferencia por lo que será más cuadrada al tener lados más iguales

Respuesta 3

* Ee cuadrado se caracteriza por tener los lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tengan menos distancia de metros, es decir:

- $11'4 - 7'5 = 03'9$
- $5'08 - 4'55 = 0'53$
- $24'5 - 18'5 = 06'0$

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

En relación a la componente razón, en la primera cuestión, los estudiantes para maestro tenían que identificar el concepto de razón como medida. Esta cuestión está relacionada con la identificación de los elementos matemáticos relevantes en cada problema. En la segunda cuestión, los estudiantes para maestro tenían que reconocer características de la comprensión de la razón como medida de los estudiantes de primaria puesta de manifiesto por la manera en la que estaba resolviendo el problema. Esta cuestión está relacionada con la interpretación de las diferentes características de las respuestas de los estudiantes. En las otras dos cuestiones se les pedía proponer decisiones de acción (modificar el problema) para apoyar al estudiante a comprender los contenidos matemáticos implicados (es decir, el objetivo de aprendizaje identificado) o afianzarlo en el caso de asumir que las respuestas dadas mostraban una comprensión adecuada. Estas últimas cuestiones están relacionadas con la toma de decisiones sobre qué tareas es posible proporcionar para consolidar o desarrollar la comprensión de los estudiantes.

En relación a las respuestas de los estudiantes de primaria de la Figura 1, la respuesta 1 es de un estudiante de primaria que usa la razón entre los lados como medida de la *cuadratura.* En esta respuesta el estudiante calcula las razones e interpreta que el loft que tiene la razón más próxima a 1 es más cuadrado. Es decir, cuantifica la idea de ser más cuadrado en *ser más próximo a 1*. En la respuesta 2 el estudiante calcula las razones entre los lados pero proporciona una justificación basada en relaciones aditivas entre los lados. La expresión *existe menor diferencia, por lo que será más cuadrado al tener lados más iguales* lleva a pensar que el estudiante está considerando la diferencia entre los lados y lo próxima que está esta diferencia a cero (…*al tener los lados más iguales*). Finalmente, en la respuesta 3 el estudiante usa relaciones aditivas identificando *ser más cuadrado* como la diferencia menor entre los lados (es decir, la que se aproxima más a 0).

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Las tareas utilizadas en el módulo de enseñanza ayudaron a los estudiantes para maestro a desarrollar la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, ya que les ayudó a reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de educación primaria y a proponer tareas para apoyar la progresión de la comprensión de los estudiantes.

Esto se puso de manifiesto cuando los estudiantes para maestro reconocían el concepto matemático implicado en la tarea, es decir, la razón como medida. El estudiante para maestro de la Figura 2 identifica la razón como medida al comentar que es un problema de comparación de razones donde se deben comparar los lados de un cuadrado y ver el que más se aproxima a 1, dado que la razón entre lo lados de un cuadrado es 1.

Figura 2. Respuesta de un estudiante para maestro a la cuestión a)

Es un problema de proporcionalidad, específicamente de comparación de razones, donde para realizar esta tarea debe conocer diferentes aspectos como: que los lados de un cuadrado son iguales y que la razón de proporcionalidad de los lados de un cuadrado es 1, por lo tanto, el resultado de la división de los lados de un rectángulo que se asemeje a un cuadrado debe ser próximo a 1.

Además, los resultados muestran que los estudiantes para maestro reconocieron la razón como medida en las respuestas de los estudiantes e identificaron diferentes características de la comprensión del concepto matemático implicado. Por ejemplo, el estudiante para maestro de la Figura 3 reconoce en la respuesta 1 que el estudiante de primaria ha realizado una comparación de razones escogiendo la razón más próxima 1 (por tanto identifica que el estudiante ha cuantificado la razón – razón como medida). En la respuesta 2 identifica el uso de razones para comparar e identifica que el estudiante de primaria no se basa en la cuantificación de la razón a 1, sino en la diferencia entre los lados de los lofts. Y en la respuesta 3 identifica las relaciones aditivas utilizadas por el estudiante de primaria.

Figura 3. Respuesta de un estudiante para maestro a la cuestión b)

b) Respuesta 1: El alumno lleva a cabo la ejecución del problema de forma correcta, ya que comprende que es un problema proporcional y realiza una comparación de razones escogiendo como resultado la comparación que se acerca más a 1.

Respuesta 2: El alumno entiende que debe realizar una comparación de razones, pero no comprende que el resultado correcto es el que está más cercano a 1. Éste considera que el resultado correcto es aquella razón en la cual entre el numerador y denominador hay una menor diferencia.

Respuesta 3: El alumno no comprende que debe realizar una comparación entre las razones y lleva a cabo la realización de restas. En este caso considera que el resultado correcto es aquel en el cual los lados son más similares, es decir 5.08 y 4.55 ya que en el cuadrado todos los lados son iguales.

Respecto a las decisiones de acción, los estudiantes para maestro fueron capaces de proponer modificaciones de la tarea tanto para ayudar a los estudiantes de primaria que tenían dificultades con el concepto matemático a progresar como para ayudar a los estudiantes a consolidar su comprensión.

Algunas decisiones centradas en hacer progresar a los estudiantes de primaria en su comprensión son las siguientes (Tabla 1):

Tabla 1. Respuestas de estudiantes para maestro a la cuestión c)

Razones enteras	c) Propondría razones enteras, es decir, que las relaciones entre las cantidades dieran un número entero.
Mayor diferencia entre los datos	c. Con ejemplos exagerados para que el alumno vea que la diferencia entre los lados puede ser significativa en rectángulos con 1 solo lado diferente, pero no en aquellos que la medida es totalmente diferente.
Un lado de los lofts igual	c) Trabajar con números enteros y que uno de los lados tenga el mismo valor.

Algunas decisiones de acción que los estudiantes para maestro propusieron para ayudar a los estudiantes de primaria a consolidar el conocimiento son las siguientes (Tabla 2):

Tabla 2. Respuestas de estudiantes para maestro a la cuestión c)

Inventar nuevo loft más cuadrado	Que ellos se inventarán un nuevo loft aún más cuadrado que el que tenemos.
Razones más similares	Para hacer más difícil la tarea podemos aumentar las medida o hacer que las proporciones sean más similares entre ellas.
Cambiar contexto / Porcentajes	d) Pondría un problema de porcentajes que siempre será más difícil.
Lofts con la misma razón	d) Para hacerlo un poco más difícil pondría entre otros dos valores que diesen la misma razón para que tuviesen que argumentar que serían de igual cercanía a ser cuadrados, aunque uno fuera más grande que otro porque la razón es la misma

4. CONCLUSIONES

El ejemplo descrito en este trabajo de diseño-implementación-análisis como parte de un ciclo de desarrollo nos permite identificar características relevantes de este proceso. El diseño y uso de actividades vinculadas a desarrollar la competencia docente de *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de los estudiantes pone de manifiesto el vínculo entre la necesidad de explicitar los procesos y conceptos matemáticos que están implícitos en la resolución de determinadas tareas como paso previo a la tarea de reconocer evidencias de la comprensión por parte de los estudiantes.

Además, este tipo de tareas ayuda a los estudiantes para maestro a crear situaciones en las que pueden aprender el conocimiento necesario para enseñar matemáticas simulando las situaciones en las que dicho conocimiento debe ser usado (interpretar las producciones de los estudiantes y proponer nuevas tareas de enseñanza).

Podemos concluir que, en el ámbito de la didáctica de la matemática, los ciclos de diseño-implementación-análisis basados en modelos de aprendizaje del maestro constituyen un contexto adecuado para la generación de materiales docentes testados científicamente y para el desarrollo de agendas de investigación sobre el aprendizaje de los maestros.

5. REFERENCIAS

Balderas, R.; Block, D. & Guerra, M.T. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Educación Matemática 26*(2), 7-32.

Buforn, A. & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

Fernández, C. & Buforn, A. (2015). Un módulo de enseñanza centrado en desarrollar el conocimiento necesario para enseñar el razonamiento proporcional. En M.T. Tortosa; J.D. Álvarez & N. Pellín (Coords.), *XIII Jornadas de Redes en Investigación en Docencia Universitaria: Nuevas estrategias organizativas y metodológicas en la formación universitaria para responder a la necesidad de adaptación y cambio* (pp. 572-584). Vicerrectorado de la Planificación Estratégica y Calidad – Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Alicante.

Fernández, C.; Llinares, S. & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Jacobs, V.R.; Lamb, L.C. & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Lamon, S.J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Livy, S. & Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica de formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática,* nº extraordinario, marzo, 31-51.

Magiera, M.; van den Kieboom, L. & Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149–169.

Sánchez-Matamoros, G.; Fernández, C. & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education, 13,* 1305-1329. DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y

Sherin, M.G.; Jacobs, V.R. & Philipp, R.A. (eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Rivas, M.A.; Godino, J.D & Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*, 559-588.

Van Es, E. & Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. Journal of Technology and Teacher Education, *10,* 571-596.